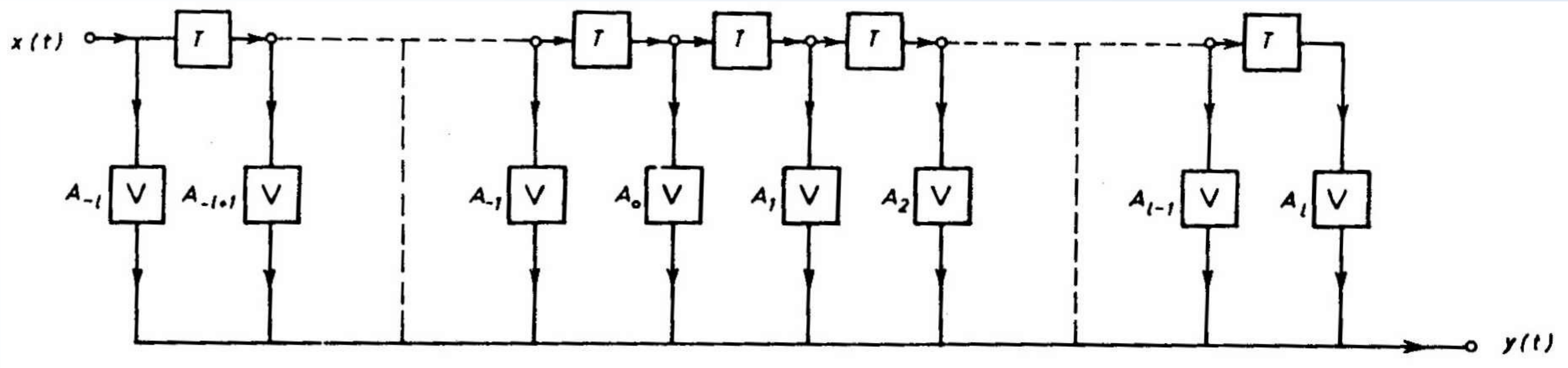
PROBLEM KOREKCIJE I TRANSVERZALNI FILTAR

Prethodna izlaganja pokazala su da funkcija prenosa sistema treba da bude realizovana u skladu sa Nyquist-ovim kriterijumima kako u njemu ne bi došlo do intersimbolske interferencije. Međutim, ti uslovi nikada ne mogu idealno da se ostvare. Nesavršenost u izgradnji filtara za oblikovanje impulsa, nepoznavanje tačnih karakteristika kanala, njihove varijacije u vremenu, čine da je gotovo uvijek neophodno da se vrši korekcija funkcije prenosa sistema. Ta korekcija ima za cilj da se amplitudska i fazna karakteristika sistema u praktičnim uslovima dovedu na onaj oblik koji zahtijevaju Nyquist-ovi kriterijumi, ili, koji im je bar toliko blizak da se i u tim realnim uslovima intersimbolska interferencija može smatrati zanemarljivom.

Ovaj zadatak obavlja se pomoću korektora, odnosno tzv. ***transverzalnog filtra***. Osnovnu ideju za njegovu konstrukciju dao je još 1940. godine *Kallmann* (***Kallmann-ov filtar***). S obzirom na njegovu adaptabilnost on se koristi gotovo u svim sistemima za prenos podataka. Relativno je jednostavan i sastoji se od kaskadne veze četvoropola označenih sa T koji predstavljaju liniju za kašnjenje. Postavljeni su na jednakim rastojanjima, tako da kašnjenje između dva susjedna izvoda iznosi T (T je trajanje signalizacionog intervala). Ukupno ima $(2l + 1)$ ovakvih izvoda.

Blok šema transverzalnog filtra je prikazana na slici.:



Signal uzet sa svakog izvoda prolazi kroz njemu odgovarajući pojačavač. Pojačanja pojačavača A_{-l}, A_{-l+1}, ..., A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_l mogu da se podešavaju i po svom iznosu i po znaku (pojačanje može biti manje od 1). Izlazni signali iz svih pojačavača se sabiraju i tako daju rezultantni izlazni signal.

Ako označimo ulazni signal u transverzalni filtar sa *x*(t), a njegov izlazni signal sa *y*(t), biće:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{\mathrm{k=-l}}^{\mathrm{l}} \mathrm{A_k} x[t-(k+l)T]$$

Ako se sa X(jω) označi Fourier-ova transformacija signala *x*(t), a sa Y(jω) Fourier-ova transformacija signala *y*(t), onda će funkcija prenosa transverzalnog filtra biti:

$$H_K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-jlT\omega} \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} = e^{-jlT\omega} H_k(j\omega)$$

Gornji izraz se sastoji iz dva karakteristična dijela:
Prvi njegov faktor $e^{-jlT\omega}$ opisuje komponentu fazne funkcije koja linearno zavisi od učestanosti, kojom se unosi konstantno kašnjenje *lT.* Drugi faktor

$$H_k(j\omega) = \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega}$$

predstavlja periodičnu funkciju po ω čija je perioda 2π/T. Oblik ove funkcije zavisi od kašnjenja T i koeficijenata A_k.
Prema tome, pogodnim izborom kašnjenja T, koeficijenata A_k i njihovim ukupnim brojem (2*l*+1), može se podešavati oblik funkcije $H_k(j\omega)$ u opsegu učestanosti $|f| \leq 1/2T$ koji odgovara jednoj njenoj periodi 2π/T. Zato transverzalni filtar i može da obavi ulogu korektora.

Ako sistem prenosa ima funkciju prenosa $H_s(j\omega)$, a prema Nyquist-ovom kriterijumu je potrebno da ona bude $H(j\omega)$, onda se kaskadnim vezivanjem transverzalnog filtra i sistema prenosa dolazi do relacije:

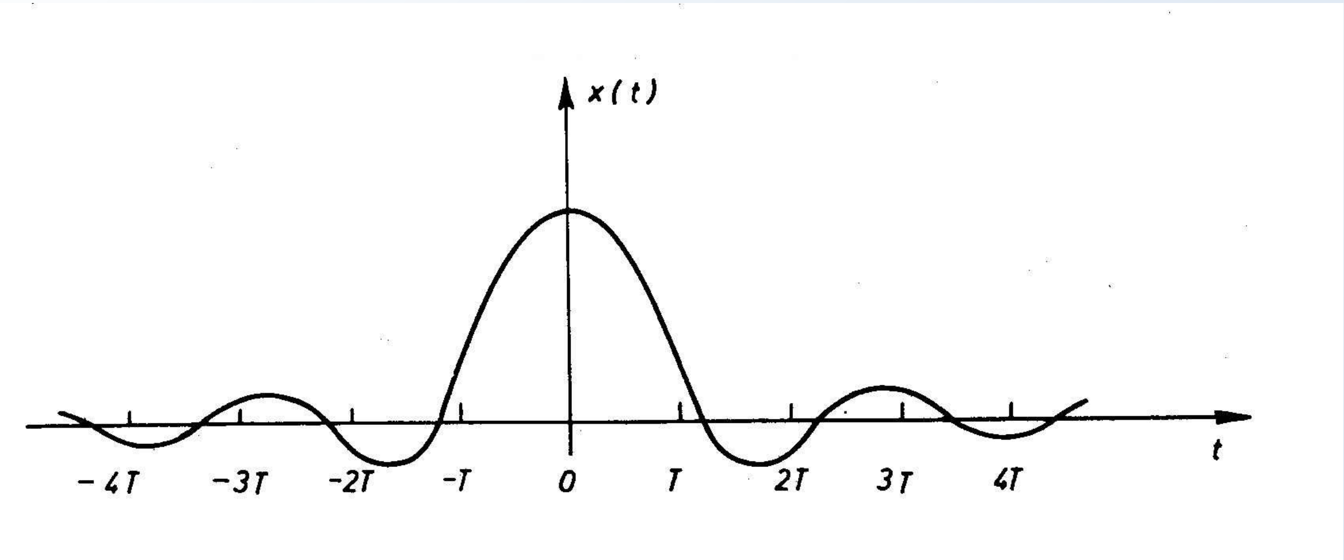
$$H_s(j\omega)H_K(j\omega) \cong e^{-jlT\omega}H(j\omega)$$

Ona omogućava da se dimenzioniše transverzalni filtar. Ako se uvrsti dobijeni izraz za H_K, dobija se:

$$H_k(j\omega) = \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} \cong \frac{H(j\omega)}{H_s(j\omega)} = F(j\omega)$$

U gornjim relacijama stavljen je znak približnosti jer se radi o aproksimaciji. U stvari od funkcije $F(j\omega)$ uzeće se dio koji se nalazi u intervalu $|\omega| \leq \pi/T$, i od njega će se napraviti periodična funkcija. Njenim razvijanjem u Fourier-ov red dobija se izraz koji kada se izjednači sa sumom iz gornjeg izraza omogućava da se metodom identifikacije odrede koeficijenti A_k. Istovremeno, moći će se procijeniti koliko koeficijenata treba uzeti u obzir za željenu aproksimaciju (odrediće se broj *l*). Što je *l* veće biće i aproksimacija bolja.
Prema tome, kada se pronađu koeficijenti A_k biće određeni pojačavači, a kad se odredi *l* znaće se i linija za kašnjenje, pa će i transverzalni filtar u potpunosti biti određen.

Ilustracije radi, pokažimo kako se transverzalnim filtrom kao korektorom može obezbijediti da se u nekom sistemu prenosa zadovolji Prvi Nyquist-ov kriterijum. Pretpostavimo da je odziv toga sistema na digitalni signal koji je poslat u jednom signalizacionom intervalu čije je trajanje T kao na slici:



Odmah se vidi da Prvi Nyquist-ov kriterijum nije ispunjen i da u tačkama odabiranja t=*m*T, gdje je *m*=±1, ±2, ... postoji intersimbolska interferencija.

Ako datom sistemu prenosa kaskadno vežemo transverzalni filtar i ako se sistem pobudi signalom *x*(t), na izlazu se dobija se signal *y*(t) u obliku:

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$

Prvi Nyquist-ov kriterijum će biti zadovoljen ako *y*(t) zadovoljava uslov da je:

$$y[(m+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{m} = 0 \\ 0, & \mathrm{m} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \end{cases}$$

Medutim, ovaj uslov upotrebom transverzalnog filtra ne može da se zadovolji u svim tačkama *m*T, već samo u onoliko tačaka koliko grana ima filtar, tj. Nyquist-ov kriterijum može da se zadovolji u konačnom broju tačaka (2*l*+1). Tada uslov glasi:

$$y[(k+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{k} = 0 \\ 0, & \mathrm{k} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \pm l \end{cases}$$

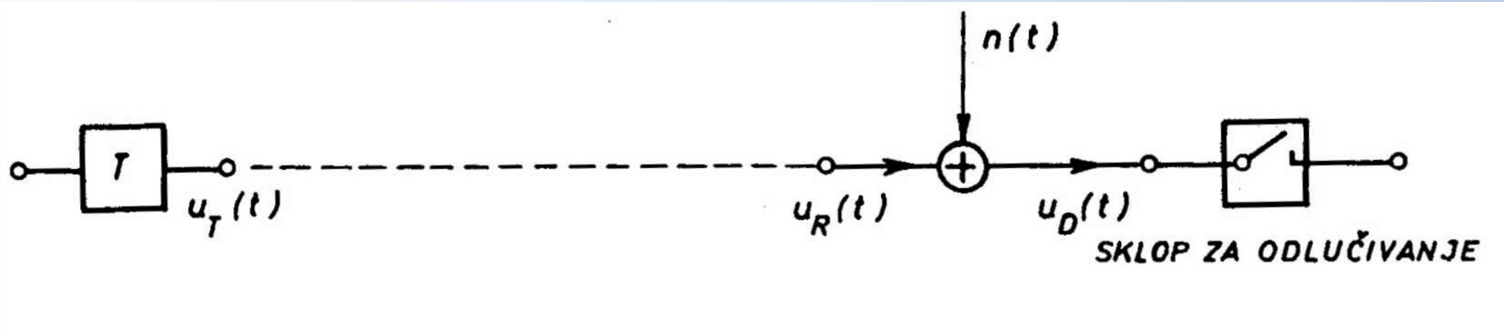
Ako se, sada, ovaj uslov uvrsti u opšti izraz za odziv sistema i za zadato *x*(t) napiše za svako *k*, dobiće se (2*l*+1) simultanih linearnih jednačina iz kojih se mogu pronaći svi koeficijenti A_k. Na taj način je osigurano da u 2*l* tačaka odabiranja odziv *y*(t) ima vrijednost nula.

UTICAJ SLUČAJNOG ŠUMA NA PRENOS DIGITALNIH SIGNALA U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Pored pojave intersimbolske interferencije, drugo važno pitanje u analizi prenosa digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti odnosi se na izučavanje uticaja šuma.
Slučajan šum je neminovno prisutan na ulazu svakog prijemnika. Po svojoj prirodi, to je slučajan proces koji slijedi Gaussov zakon raspodjele amplituda i koji se može statistički opisati funkcijom gustine vjerovatnoće, datom sa:

$$p(U_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 \text{ - varijansa, } \sigma^2 = U_{Neff}^2 = \overline{U_N^2}$$

Blok šema sistema za prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti je:



Na ulazu u prijemnik, slučajni šum se superponira signalu, pa se zato često i kaže da je to ***aditivni šum***. Tako sabrani signal i šum stižu na ulaz sklopa za odlučivanje.
Ako sa $u_R(\mathrm{t})$ označimo signal na ulazu tog sklopa, a sa $n(\mathrm{t})$ šum, onda će signal na osnovu koga se donosi odluka biti:

$$u_{\mathrm{D}}(\mathrm{t})=u_{\mathrm{R}}(\mathrm{t})+n(\mathrm{t})$$

Razmatraćemo one signale kod kojih je značajni parametar njihova amplituda u datom trenutku vremena. To znači da se u sklopu za odlučivanje uzimaju odbirci ovog signala u svakom signalizacionom intervalu i porede sa nekom referentnom vrijednošću na osnovu čega se donosi odluka o vrijednosti značajnog parametra.
Ako sa $\mathrm{t}=m\mathrm{T}$, gdje je $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ označimo trenutke odabiranja, onda će amplituda odbiraka u tim trenucima biti:

$$u_{\mathrm{D}}(m\mathrm{T})=u_{\mathrm{R}}(m\mathrm{T})+n(m\mathrm{T})$$

Jasno je da u zavisnosti od toga koliki je relativni iznos amplitude odbirka šuma u odnosu na amplitudu odbirka signala, uzeti odbirak može da bude toliko izmijenjen da prijemnik donese pogrešnu odluku. Kvantitativna ocjena ovog efekta se izražava **vjerovatnoćom greške**. Na osnovu nje se međusobno mogu porediti različiti sistemi, ali vjerovatnoća greške kao kvantitaivni pokazatelj performansi pruža i mogućnost da se sagleda uticaj raznih parametara sistema i da se njenom minimizacijom optimizuje cijeli sistem.

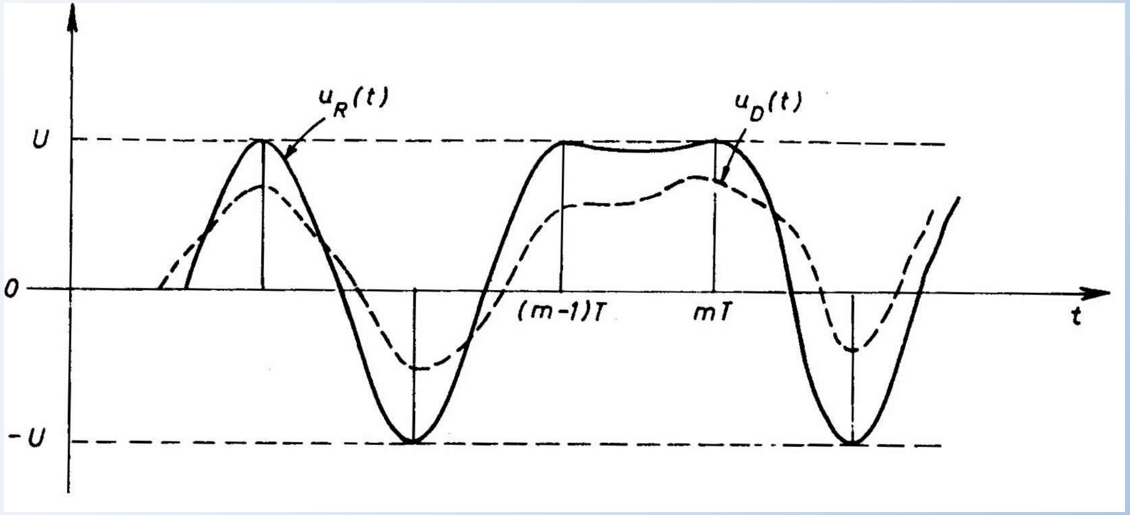
VJEROVATNOĆA GREŠKE PRI ODLUČIVANJU

Vjerovatnoća greške u odlučivanju biće analizirana za slučajeve prenosa u osnovnom opsegu učestanosti tri vrste digitalnih signala:

1. polarni binarni,
2. unipolarni binarni
3. M-arni signal

1. <u>Polarni binarni signal</u>

   Pretpostavimo da polarni binarni signal $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje izgleda kao na slici. Neka u trenucima odabiranja amplituda ovog signala $u_R(mT)$, kao značajan parameter, ima jednu od dvije moguće vrijednosti $u_R(mT) = \pm U$.



Na istoj slici prikazan je i signal $u_D(t)$ koji je dobijen superpozicijom korisnog signala i šuma.

Neka je vjerovatnoća da predajnik šalje binarni digit + 1, predstavljen amplitudom odbirka na prijemu U, jednaka P(U), a vjerovatnoća da šalje digit -1, predstavljen amplitudom –U, P(-U). Važi da je P(U)+ P(-U)=1.

Osim toga, pretpostavimo da na ulazu u sklop za odlučivanje šum $n(t)$ predstavlja Gaussov slučajni proces čija je srednja vrijednost jednaka 0. On je okarakterisan funkcijom gustine vjerovatnoće:

$$p(U_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Razmatrajmo dvije situacije:

1. Predajnik uzastopno šalje binarnu jedinicu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)$=U. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena t=mT uzimaju se odbirci ulaznog signala $u_D(t)$. Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D(mT)=u_R(mT)+n(mT)=U+n(mT)$$

Kako je amplituda odbiraka šuma slučajna veličina, to će i amplituda odbiraka $u_D(mT)$ takođe biti slučajna veličina. Ako označimo ove slučajne veličine na sledeći način:

$$n(mT) = u_N \qquad u_D(mT) = u_D$$

biće:

$$u_D = U + u_N$$

Raspodjela amplituda odbiraka u_D , kao nove slučajne promjenljive, može da se opiše odgovarajućom funkcijom gustine vjerovatnoće $q_U(u_D)$. Ona se dobija transformacijom poznate gustine vjerovatnoće $p(u_N)$:

$$q_U(u_D)du_D = p(u_N)du_N$$

Vjerovatnoća da se amplituda rezultantnog odbirka u_D nalazi između u_D i u_D+du_D mora biti jednaka vjerovatnoći da amplituda šuma u_N bude između u_N i u_N+du_N. Saglasno definiciji funkcije gustine vjerovatnoće, biće:

$$q_U(u_D) = p(u_D - U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D-U)^2}{2\sigma^2}}$$

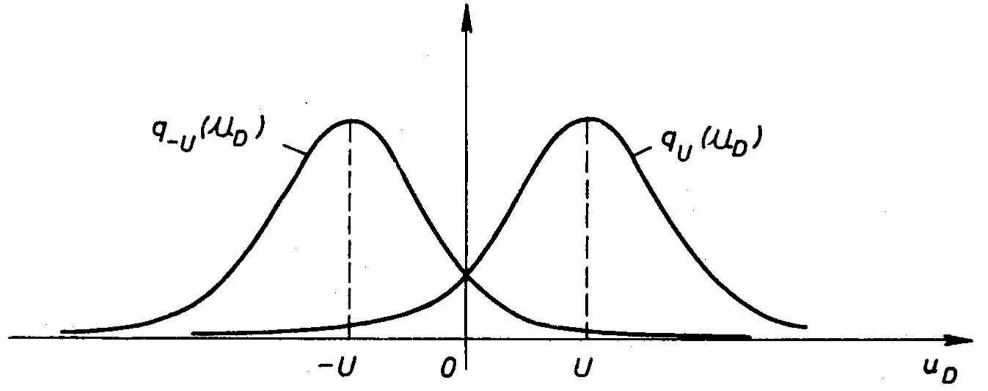
2. Predajnik uzastopno šalje binarnu nulu kojoj odgovara amplituda odbirka signala $u_R(mT)= -U$. Sklopom za odlučivanje u regularnim trenucima vremena $t=mT$ uzimaju se odbirci ulaznog signala $u_D(t)$. Vrijednost ovih odbiraka će biti:

$$u_D = -U + u_N$$

tj. funkcija gustine vjerovatnoće amplituda uzetih odbiraka kada se šalje logička nula je:

$$q_{-U}(u_D) = p(u_D + U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkcije $q_U(u_D)$ i $q_{-U}(u_D)$ prikazane su na slici. Na osnovu ove dvije funkcije gustine vjerovatnoće možemo odrediti vjerovatnoću bilo koje vrijednosti amplituda.



Sa slike je jasno da su u principu moguće sve vrijednosti amplituda odbiraka u_D , pa se postavlja pitanje kako programirati postupak za donošenje odluke u sklopu za odlučivanje.

Prije svega, pretpostavimo da je, u nekoj dugoj povorci koju predajnik šalje, vjerovatnoća sa kojom se pojavljuje jedan bit jednaka vjerovatnoći sa kojom se pojavljuje drugi bit (P(U) = P(-U) = 1/2). Zaključak je da prag odluke u sklopu za odlučivanje treba postaviti na sredinu mogućih vrijednosti. Kako su te vrijednosti +U i -U, onda se za prag uzima vrijednost 0. Dakle, prijemnik će raditi tako što će svaki odbirak čija je amplituda $u_D>0$ interpretirati kao binarnu brojku 1, a svaki odbirak čija je amplituda $u_D<0$ biti proglašen za -1.

Uslijed prisustva šuma može doći do greške, koja će nastupiti svaki put kada se šalje binarna cifra 1, a amplituda napona odbirka bude $u_D < 0$,kao i kada se šalje -1, a amplituda bude $u_D>0$. Analitički se ove greške izražavaju uslovnom vjerovatnoćom.

Ako se ša1je "1" amplituda odbirka korisnog signala iznosi U, pa uslovna vjerovatnoća da prijemnik donese pogrešnu odluku, tj. da je poslata cifra bila –1 iznosi:

$$P(-1|U) = P[(u_D < 0|U] = \int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D$$

U drugom slučaju greška nastaje ako se šalje binarna brojka –1 (amplituda korisnog signala iznosi –U), tako da uslovna vjerovatnoća da prijemnik pogriješi tako što će odlučiti da je poslata cifra bila 1, glasi:

$$P(1|-U) = P[(u_D > 0|-U] = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Sada će ukupna vjerovatnoća greške biti:

$$P_e = P(U)P(-1|U) + P(-U)P(1|-U)$$

Gore navedeni integrali su jednaki, tj. važi da je:

$$\int_{-\infty}^{0} q_U(u_D)du_D = \int_{0}^{\infty} q_{-U}(u_D)du_D$$

Kako je $P(U) = P(-U) = \frac{1}{2}$, konačno se dobija:

$$P_e = \int_0^{\infty} q_{-U}(u_D)\,du_D$$

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(u_D+U)^2}{2\sigma^2}}\,du_D = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,erf\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Uzimajući u obzir da je *erfc x* = 1- *erf x* komplementarna funkcija greške, konačno vjerovatnoću greške možemo da zapišemo u obliku:

$$P_e = \frac{1}{2}\,erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Napomena: U *je* razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja, odnosno predstavlja ***polovinu razlike amplituda odbiraka*** koji odgovaraju binarnim simbolima + 1 i -1, a ***ne apsolutnu vrijednost odbirka.***

2. Unipolarni binarni signal

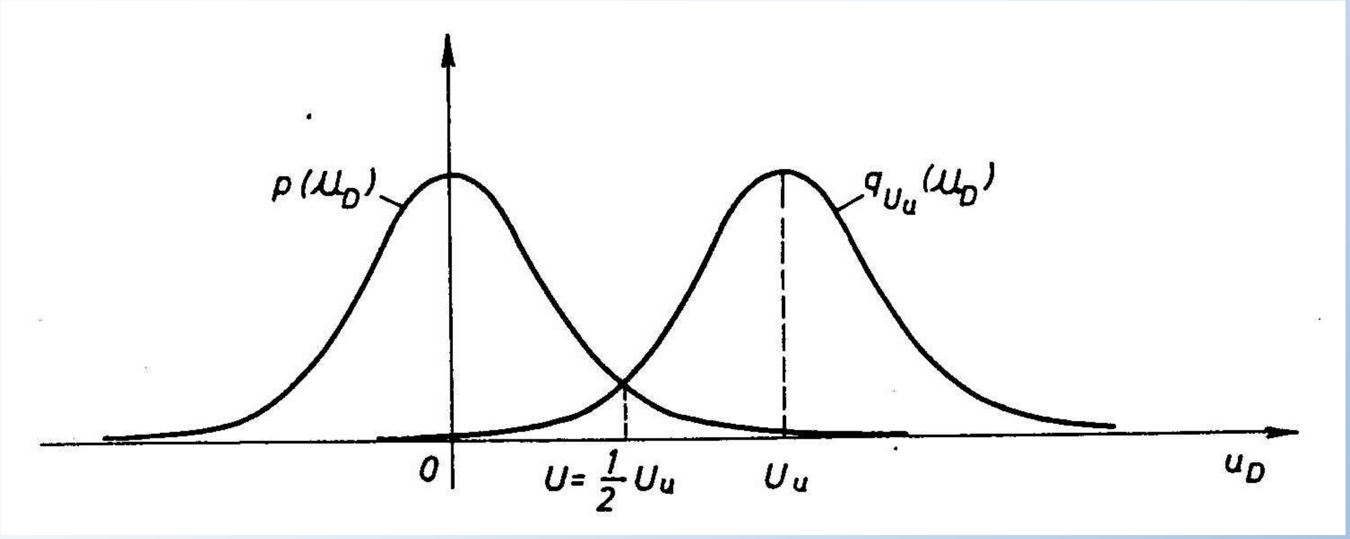
Pretpostavimo da predajnik šalje unipolarni binarni signal. Neka binarnoj "1" odgovara amplituda odbirka korisnog signala $u_R(t)$ na ulazu u sklop za odlučivanje jednaka U_u , a binarnoj "0" odgovara amplituda odbirka jednaka 0. Tada će amplituda odbirka rezultantnog signala $u_D(t)$ u slučaju da se šalje binarna "1" biti:

$$u_D = U_u + u_N \quad ,$$

a u slučaju da se šalje binarna "0":

$$u_D = u_N$$

Ovim slučajnim promjenljivim odgovaraju funkcije gustine vjerovatnoće prikazane na slici:



Ako predajnik šalje i jedan i drugi binarni simbol sa jednakom vjerovatnoćom, onda će važiti relacija:

$$P(U) = P(0) = \frac{1}{2}$$

pa se opet intuitivno dolazi do zaključka da prag u sklopu za odlučivanje treba postaviti na sredinu između dvije očekivane vrijednosti U_u i 0, tj. prag će biti postavljen na vrijednost:

$$U = \frac{1}{2} U_u$$

Daljom analizom se dolazi do izraza za vjerovatnoću greške:

$$P_{\mathrm{e}} = P(\mathrm{U_u}) P(0|\mathrm{U_u}) + P(0) P(1|0)$$

Važi da je:

$$P(0|U_u) = P\left[u_D < \frac{U}{2} \middle| U\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}U_u} q_{U_u}(u_D)\, du_D$$

i:

$$P(1|0) = P\left[u_D > \frac{U}{2} \middle| 0\right] = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)\, du_D$$

Površine definisane sa ova dva integrala su jednake, tj. P(1|0)= P(0|1), i P(0)=P(1)=1/2, pa je:

$$P_e = \int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} p(u_D)du_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{1}{2}U_u}^{\infty} e^{-\frac{U_D^2}{2\sigma^2}} du_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{U_u}{2\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf\,\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma}$$

Konačno se dobija da je:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\,\frac{U_u/2}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2} erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Vjerovatnoća greške u slučaju prenosa unipolarnog signala zavisi od karakteristike prisutnog šuma (σ) i polovine razlike amplituda odbiraka koji odgovaraju binarnim digitima 1 i 0, odnosno razlike amplituda odbirka signala (U_u ili 0), i vrijednosti na koju je postavljen prag odlučivanja ($U=U_u/2$).

3. M-arni signal

Pretpostavimo da predajnik šalje M-arni digitalni signal. Amplituda odbirka ovakvog signala može da ima jednu od M različitih vrijednosti. Neka su one uniformno raspoređene tako da se bilo koje dvije susjedne vrijednosti na ulazu u sklop za odlučivanje razlikuju za konstantnu vrijednost 2U. Pretpostavimo još i da se svi simboli u poruci šalju sa istom vjerovatnoćom (P_i=1/M). U ovim uslovima pragovi odlučivanja se postavljaju na sredinu izmedu dvije susjedne vrijednosti amplitude.

Do greške će doći u slučaju kad je amplituda odbirka šuma u_N manja od -U i veća od U. U prvom slučaju prijemnik će pogrešno da donese odluku da je bila poslata neka niža vrijednost, a u drugom neka viša. Izuzetak su prvi i zadnji nivo, tj. slučaj kada odbirak ima najveću amplitudu i slučaj kada je amplituda odbirka najmanja. U tim slučajevima može da se griješi samo "na jednu stranu", tj. kada odbirak ima najveću amplitudu, samo amplitude odbiraka šuma u_N<-U prouzrokuju grešku; slično, kad odbirak ima najmanju amplitudu samo odbirci šuma čije su amplitude u_N > U dovode do greške.

Sada možemo da pronađemo izraz za vjerovatnoću greške.

Posmatrajmo prvi (najniži) nivo:
Vjerovatnoća da prvi simbol bude poslat je $P_1 = \frac{1}{M}$, a vjerovatnoća da šum bude manji od U je:

$$P(u_N < U) = \int_{-\infty}^{U} p(u_N)du_N$$

Vjerovatnoća da taj simbol bude ispravno primljen je:

$$P_1 = \frac{1}{M}P(u_N < U) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{U} p(u_N)du_N$$

Za najviši, M-ti nivo se na sličan način dolazi do izraza za vjerovatnoću da M-ti simbol bude ispravno primljen:

$$P_M = \frac{1}{M}P(u_N > -U) = \frac{1}{M}\int_{-U}^{\infty} p(u_N)du_N$$

Za sve ostale simbole vjerovatnoća da budu ispravno primljeni je:

$$P_2 = \frac{1}{M} P(-U < u_N < U) = \frac{1}{M} \int_{-U}^{U} p(u_N) du_N = P_3 = \ldots = P_{M-1}$$

Ukupna vjerovatnoća ispravnog prijema je data sa P_K:

$$P_K = P_1 + P_2 + \cdots + P_{M-1} + P_M = \frac{1}{M}\left[\int_{-\infty}^{U} p(u_N)du_N + (M-2)\int_{-U}^{U} p(u_N)du_N + \int_{-U}^{\infty} p(u_N)du_N\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\left[1 + 2(M-1)\int_{0}^{U} p(u_N)du_N\right]$$

Ako uzmemo u obzir da *p*(u_N) predstavlja Gaussovu raspodjelu, tj.

$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Konačno se dobija da je vjerovatnoća ispravnog prijema data izrazom:

$$P_K = \frac{1}{M}\left[1 + (M-1)\,erf\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right]$$

Vjerovatnoća greške se sada dobija kao:

$$P_e = 1 - P_K = \frac{M-1}{M}\,erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

pod uslovom da se svi simboli javljaju sa istom vjerovatnoćom.

Za M=2 dobija se:

$$P_e = \frac{1}{2}\,erfc\,\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}\,erfc A$$

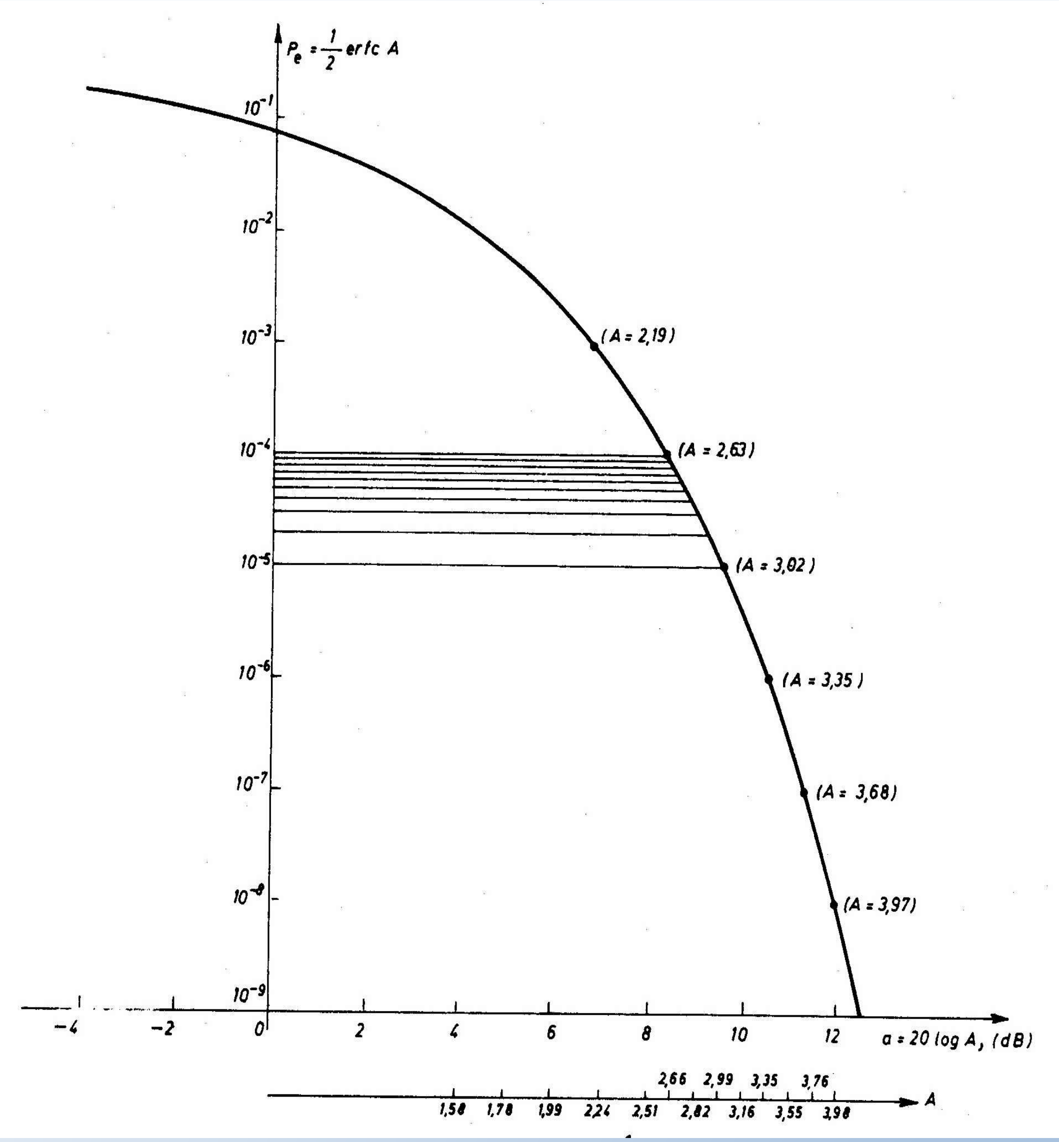
što je u skladu sa izračunatom vrijednošću za polarne binarne signale. Argument komplementarne funkcije greške A zavisi od polovine rastojanja između dva susjedna nivoa, kao i karakteristika šuma.

Zaključak:

Izvedena su tri značajna izraza koja omogućavaju da se izračuna vjerovatnoća greške u prenosu poruka polarnim binarnim signalom, unipolarnim binarnim signalom i M-arnim signalom.

Upoređujući ih, vidi se da se vjerovatnoća greške u sva tri slučaja opisuje komplementarnom funkcijom greške.

U odgovarajućoj razmjeri na slici je prikazana grafička predstava funkcije pomoću koje se u bilo kom od razmatranih slučajeva lako utvrđuje vjerovatnoća greške.



Vjerovatnoća greške uvijek zavisi od odnosa U/σ, gdje je U razlika amplitude odbirka signala i vrijednosti na koju je postavljen prag, a σ predstavlja efektivnu vrijednost šuma. I za jednu i za drugu veličinu, U i σ, relevantne su vrijednosti koje imaju na ulazu u sklop za odlučivanje. Na taj način, izvedene relacije uzimaju u obzir isključivo mehanizam donošenja odluke u prisustvu aditivnog bijelog Gaussovog šuma.

Kao što se vidi na prethodnoj slici ovaj odnos treba maksimizirati kako bi vjerovatnoća greške bila što manja. Međutim, u tom slučaju treba voditi računa i o nizu drugih faktora o čemu će naknadno biti riječi.

OPTIMIZACIJA SISTEMA ZA PRENOS U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Prethodno je razmatran uticaj dvije značajne pojave na prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. To su intersimbolska interferencija i slučajni šum. Naredni korak podrazumijeva analizu uslova i definisanje zaključaka o tome šta treba uraditi pa da njihov, u pogledu kvaliteta prenosa, degradirajući uticaj bude što je moguće manji. Generalno, to se postiže optimizacijom prijemnika, optimizacijom predajnika, odnosno njihovom združenom optimizacijom. U stvari, cilj svake optimizacije je da se projektuje sistem koji je u pretpostavljenim uslovima, prema nekim usvojenim kriterijumima za kvalitet, najbolji. Medutim, čitav je niz pretpostavki koje mogu biti uzete u obzir u manjoj ili većoj mjeri, brojni su i međusobno različiti i kriterijumi o kvalitetu. Stoga i odgovori na pitanje koji je to sistem koji je optimalan, imaju smisla samo onda kada se znaju svi postavljeni uslovi i svi kriterijumi. U narednim analizama kriterijum za ocjenu kvaliteta sistema biće vjerovatnoća greške.

Kako smo pokazali, izraz za vjerovatnoću greške zavisi od odnosa U/σ, i to tako da je vjerovatnoća greške manja što je navedeni odnos veći. Stoga će cilj optimizacije biti maksimiziranje odnosa U/σ.

Kako bi analiza imala opštiji karakter, razmatraćemo jedan M-arni signal koji se na ulazu u sistem ili neki njegov dio opisuje izrazom:

$$u_u(t) = \sum_{-N}^{N} a_k x(t - kT)$$

dok je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom:

$$u_i(t) = \sum_{-N}^{N} a_k y(t - kT)$$

x(t) je standardni signal, koji je unaprijed poznat,
y(t) je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom,
T je trajanje signalizacionog intervala,
koeficijent a_k u k-tom signalizacionom intervalu je jednak jednoj od M diskretnih vrijednosti s_1, s_2, . . ., s_M koju može da ima značajni parametar signala i koja opisuje prenošenu poruku.

Pretpostavimo da se diskretne vrijednosti s_i, s_{i-1} na predaji razlikuju za neku konstantu, tj. $s_i - s_{i-1} = 2a$, tako da a_k uvijek ima jednu od sledećih vrijednosti:

$$a_k = s_i = \left\{ \begin{matrix} 0, \ \pm 2a, \ \pm 4a, \ \pm \ \cdots \ \pm (\mathrm{M\text{-}1})a & ;\mathrm{M\text{-}neparno} \\ \pm a, \ \pm 3a, \ \pm 5a, \pm \ \cdots \ \pm (\mathrm{M\text{-}1})a & ;\mathrm{M\text{-}parno} \end{matrix} \right\}$$

Emitovani signal $u_u(t)=\sum_{-N}^{N} a_k x(t-kT)$ se prenosi linijom veze, pa ako sa *y*(t_m) označimo amplitudu odbirka odziva *y*(t) na standardni signal *x*(t), razlika dvije susjedne amplitude odbiraka M-arnog signala na mjestu prijema biće:

$$s_i y(t_m) - s_{i-1} y(t_m) = 2U = 2ay(t_m)$$

Pod uslovom da su sve vrijednosti s_i jednako vjerovatne i da je prag odlučivanja za dvije susjedne vrijednosti postavljen na sredinu između njih, za vjerovatnoću greške važi izraz:

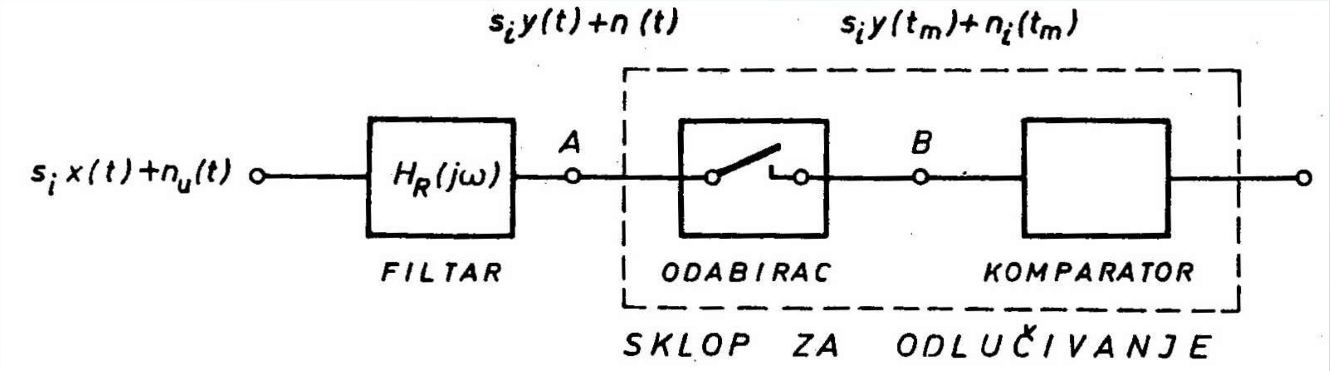
$$P_e = \frac{M-1}{M} erfc \frac{ay(t_m)}{\sqrt{2}\sigma}$$

U ovom izrazu, argument komplementarne funkcije greške koji treba maksimizirati napisan je u obliku podesnom za dalju analizu. On zavisi od toga koliko se međusobno razlikuju dvije susjedne vrijednosti značajnog parametra izabrane na predaji, zavisi od toga kakav je standardni odziv i njegov odbirak i zavisi od šuma na ulazu u sklop za odlučivanje.

U daljoj analizi, razmatraćemo dva značajna slučaja:
1. Optimizacija sistema kada u njemu ***ne postoji*** intersimbolska interferencija
2. Optimizacija sistema u kome istovremeno treba ispuniti i uslove da u njemu ne dođe do intersimbolske interferencije.

OPTIMIZACIJA SISTEMA KADA NE POSTOJI ISI
- OPTIMALNI FILTAR -

Posmatrajmo sistem za prenos digitalnih signala čiji je prijemni dio prikazan blok šemom:



Kao što se vidi, na ulazu u prijemnik ispred sklopa za odlučivanje nalazi se prijemni filtar. Očigledno je da njegovo prisustvo utiče i na signal i na šum koji dolaze na ulaz u odabirač. Sada se postavlja pitanje da li je moguće izborom ovog filtra uticati na to da se maksimizira argument komplementarne funkcije greške U/σ (minimizira vjerovatnoća greške).

Odgovor na ovo pitanje je potvrdan. Filtar kojim se koriguje funkcija prenosa sistema kako bi se povećao navedeni odnos se naziva ***optimalni filtar***. Pri tome, treba imati u vidu da je optimizacija moguća pod određenim uslovima.

Smatraćemo da je vremenska zavisnost M-arnog digitalnog signala određena standardnim signalom *x*(t) čije je trajanje strogo ograničeno na odgovarajući signalizacioni interval čije je trajanje T. Pretpostavimo još da u sistemu, od predajnika do ulaza u prijemnik, intersimbolska interferencija ne postoji.

Uz ove dvije pretpostavke zadatak optimizacije može se formulisati na sledeći način:
Kada nema intersimbolske interferencije, a na ulazu u prijemni filtar u jednom posmatranom signalizacionom intervalu je prisutan poznati signal

$$u_{Su}(t) = s_i x(t), \qquad 1 \le i \le M$$

pri čemu postoji i aditivni bijeli Gaussov šum $n_u(t)$ čija je srednja vrijednost jednaka 0, kako treba izabrati funkciju prenosa prijemnog filtra $H_R(j\omega)$, pa da odnos amplitude odbirka $y(t_m)$ standardnog odziva i efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra $(y(t_m)/\sigma)$ bude maksimalan?

Može se tražiti maksimalna vrijednost izraza $y(t_m)/\sigma$, mada je nekada jednostavnije uzeti odnos kvadrata ovih veličina (u pogledu maksimiziranjanja nema razlike):

$$A_N = \frac{y^2(t_m)}{\sigma^2} = \frac{y^2(t_m)}{\overline{n_i^2(t)}}$$

Vrijednost *a* je konstanta, pa ona nema značaja prilikom maksimiziranja, tako da cijelu analizu možemo da sprovedemo tako što ćemo uzeti da se filtar $H_R(j\omega)$ pobuđuje signalom $x(t)$ koji na izlazu daje odziv $y(t)$. Uz pretpostavku da je $X(j\omega)$ Fourier-ova transformacija $x(t)$, odziv je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pa je tražena vrijednost amplitude odbirka ovog signala u trenutku $t = t_m$ jednaka:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t_m} d\omega$$

Što se tiče efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra, nju ćemo pronaći na sledeći način. Neka je šum na ulazu u filtar specificiran spektralnom gustinom snage $S_N(\omega)$. Tada će spektralna gustina snage šuma $n_i(t)$ na izlazu iz filtra biti:

$$S_{Ni}(\omega) = \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)$$

Srednja kvadratna vrijednost šuma je jednaka kvadratu njegove efektivne vrijednosti. Zato je ona istovremeno jednaka i srednjoj snazi šuma na otporniku otpornosti 1Ω, pod uslovom da slučajna funkcija $n_i(t)$ opisuje napon šuma na njegovim krajevima. Na osnovu ovoga biće:

$$\sigma^2 = u_{Neff}^2 = \overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega$$

Obrazujmo sada odnos A_N, uz napomenu da važi:

$\overline{n_i^2(t)} = \overline{n_i^2(t_m)}$ i $y^2(t_m) = \left|y(t_m)\right|^2$, jer je $y(t)$ realna funkcija vremena.

$$A_N = \frac{\left|y(t_m)\right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega}$$

Da bi se pronašla funkcija prenosa $H_R(j\omega)$ koja čini ovaj odnos maksimalnim, potrebno je primijeniti Schwarz-ovu nejednakost. Ta nejednakost definiše da dvije kompleksne funkcije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$ uvijek zadovoljavaju sledeću relaciju:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(j\omega)\right|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_2(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Znak jednakosti u ovom izrazu važi u slučaju kada je

$$F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$$

gdje je k proizvoljna konstanta. Ako usvojimo da je:

$$F_1(j\omega) = H_R(j\omega)S_N^{\frac{1}{2}}(\omega)$$

$$F_2(j\omega) = X(j\omega)S_N^{-\frac{1}{2}}(\omega)e^{j\omega t_m}$$

dobija se:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 S_N^{-1}(\omega)d\omega$$

Saglasno gornjem izrazu važi da je:

$$A_N = \frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)}\, d\omega$$

Maksimalna vrijednost A_N se postiže u slučaju znaka jednakosti, pa je:

$$A_{N\max} = \left[\frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}}\right]_{\max} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)}\, d\omega$$

Kako je u tom slučaju $F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$ dobija se izraz za optimalni filtar

$$H_R(j\omega) = H_{Ropt}(j\omega) = k\frac{X^*(j\omega)}{S_N(\omega)}e^{-j\omega t_m} = k\frac{X(-j\omega)}{S_N(\omega)}e^{-j\omega t_m}$$

Izvedeni izraz pokazuje da <u>funkcija prenosa optimalnog filtra zavisi i od signala i od šuma na njegovom ulazu.</u>

Postoji više vrsta optimalnog filtra. Navešćemo neke od njih.

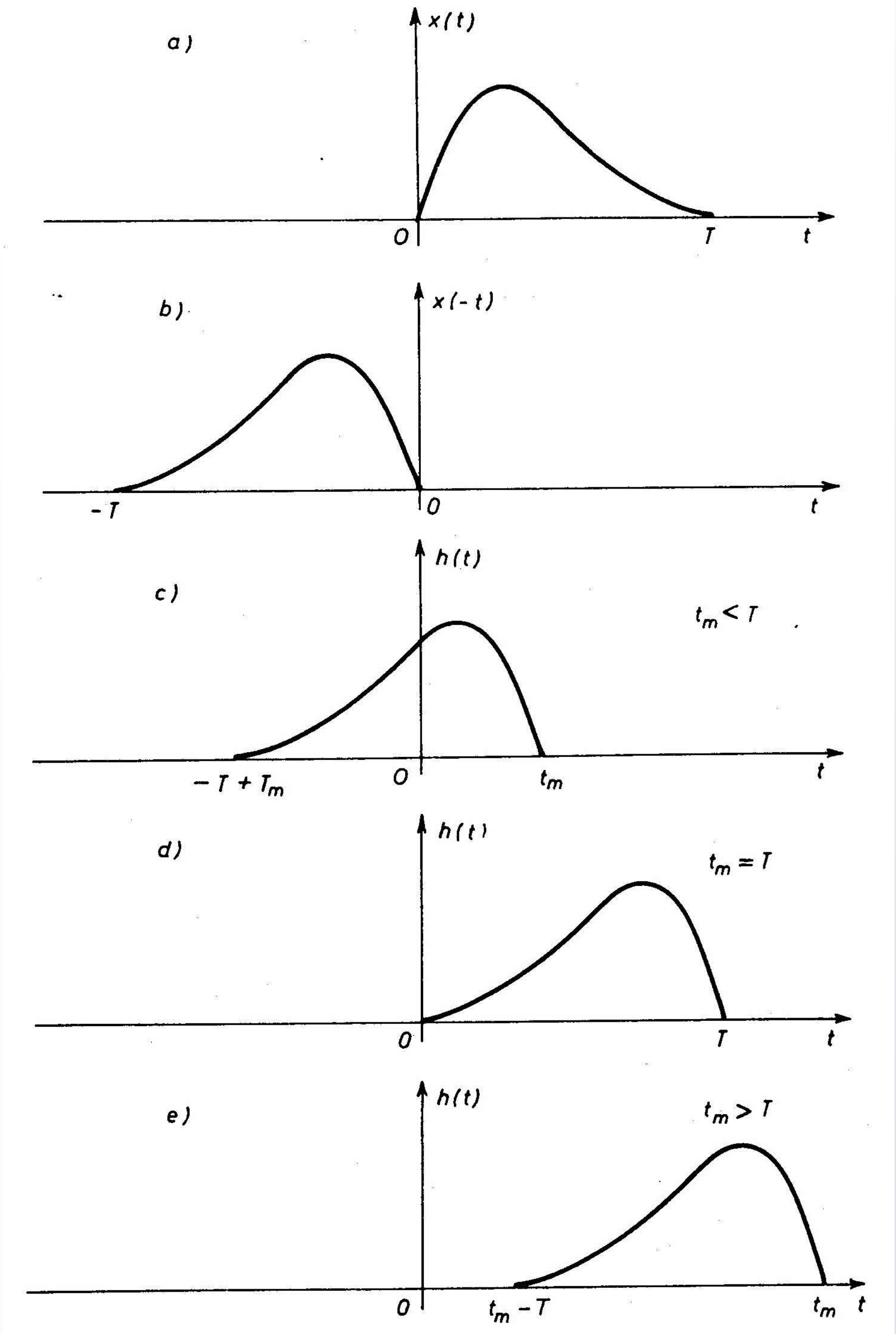
Podešeni filtar

Posmatrajmo optimalni filtar koji funkcioniše u uslovima kada na njegovom ulazu postoji bijeli šum. Tada je spektralna gustina snage ovog šuma $S_N(\omega)=S_N$ konstantna u cijelom opsegu učestanosti. Ako se ovo uvrsti u izraz za $H_{Ropt}(j\omega)$, dobiće se da impulsni odziv ovog optimalnog filtra iznosi:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{Ropt}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{k}{S_N}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)e^{j\omega(t-t_m)}d\omega$$

$$h(t)=\frac{k}{S_N}x(t_m-t)$$

Ovaj izraz pokazuje da je impulsni odziv optimalnog filtra, kad je na njegovom ulazu bijeli šum, određen signalom $x(t)$. Dakle, u pretpostavljenim uslovima, da bi se izvršila optimizacija, filtar mora biti podešen obliku signala, Zato se ovakav filtar i naziva ***podešenim filtrom***.



Na početku ove analize pretpostavljeno je da signal $x(t)$ ima konačno trajanje T. Na slici *a*) je prikazan signal $x(t)$, na slici *b*) njegov lik u ogledalu $x(-t)$, a na ostale tri slike odziv $h(t)$ za slučajeve kada je t_m<T, t_m=T i t_m>T.

U prvom slučaju kada je t_m<T (slika *c*), impulsni odziv postoji i za vrijeme $t<0$. Dakle, takav sistem fizički nije ostvarljiv.

U ostala dva slučaja (t_m=T i t_m>T) impulsni odziv $h(t)=0$ za $t<0$, pa je uslov fizičke realizacije ispunjen. Po pitanju kvaliteta bolje je da se češće uzimaju odbirci, tj. poželjno je da vrijeme t_m bude što manje kako bi se odluke donosile što češće. Stoga se za podešeni filtar uzima da je t_m=T.
Prema tome, na izlazu iz podešenog filtra odnos odbirka $y\ (t_m)$ signala $y(t)$ i efektivne vrijednosti šuma, dostiže svoj maksimum kad je trenutak odabiranja t_m jednak T, a to znači u trenutku u kome je cijeli signal $x(t)$ već u prijemniku.

Sada je maksimalna vrijednost A_N na izlazu iz podešenog filtra:

$$A_{N\max} = \left[\frac{\left|y(t_m)\right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \right]_{\max} = \left[\frac{\left|y(t_m)\right|^2}{\sigma^2} \right]_{\max} = \frac{1}{S_N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{W_x}{S_N}$$

gdje W_x predstavlja ukupnu energiju standardnog signala $x(t)$ na ulazu u filtar, a S_N je spektralna gustina snage bijelog šuma na tom istom ulazu.

Dobijeni rezultat dovodi do sledećeg zaključka: **odnos kvadrata amplitude odbirka odziva i kvadrata efektivne vrijednosti šuma ne zavisi za podešeni filtar od oblika pobudnog signala *x*(*t*), već zavisi od njegove energije.** To znači da različiti signali koji nose istu energiju mogu dati istu vjerovatnoću greške. Ovo je specifično svojstvo podešenog filtra.

Isto važi i za amplitudu odbirka $y(t_m)$, jer ona iznosi:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{X^*(j\omega)}{S_N} e^{-j\omega t_m} X(j\omega) e^{j\omega t_m} d\omega = k \frac{W_x}{S_N}$$

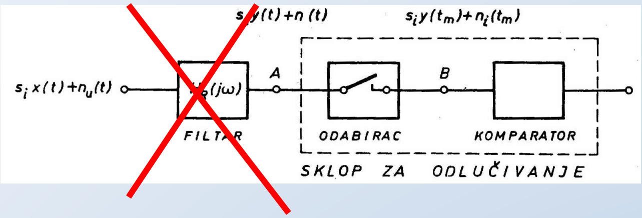
Oblik standardnog signala je u ovom slučaju odredio oblik funkcije prenosa filtra, ali ne i njegov izlaz.

Korelator

Predstavlja jednu varijantu podešenog filtra. To je prijemnik digitalnih signala koji ima iste performanse kao i prijemnik sa podešenim filtrom, ali se realizuje bez klasičnog filtra. Do njegovog dizajna dolazi se na sledeći način.

Pretpostavimo da na ulaz dolazi složeni napon:

$$u_u(t) = x(t) + n_u(t)$$



Impulsni odziv podešenog filtra je:

$$h(t) = \frac{k}{S_N} x(t_m - t)$$

Izlazni signal $u_i(t)$ se dobija kao konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sistema:

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(t_m - t + \tau) d\tau$$

Sada je cilj da se utvrdi kako se može dobiti identičan izlaz bez upotrebe podešenog filtra.

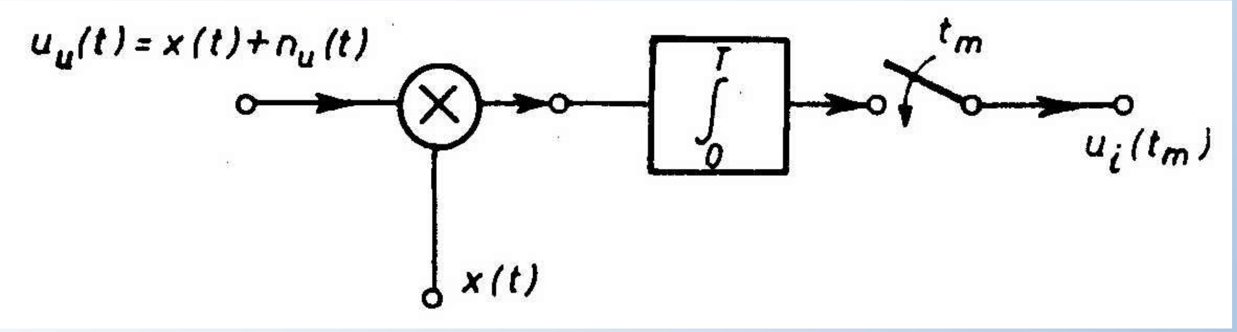
Odbirak na osnovu koga se donosi odluka u trenutku t_m ima amplitudu:

$$u_i(t_m) = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Kako je trajanje signala $x(t)$ ograničeno na interval od 0 do T=t_m, to se granice integrala mogu ograničiti tako da je:

$$u_i(t_m) = u_i(T) = \frac{k}{S_N} \int_{0}^{t_m = T} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Ovaj izraz pokazuje kako je moguće konstruisati prijemnik na drugi način. On je prikazan na slici. Na njegovom ulazu se nalazi produktni modulator u kome se množe ulazni signal i signal iz lokalnog oscilatora.



Nakon toga, njihov proizvod se dolazi na ulaz integratora i odbirak se uzima na njegovom izlazu u trenutku t_m=T. Naravno, po završetku jednog signalizacionog intervala, svi inertni elementi moraju da rasterete svoje električno opterećenje kako bi proces u svakom intervalu T bio potpuno nezavisan.

Kako se u ovom prijemniku obavlja koherentna ili sinhrona demodulacija i pošto se u njemu korelira dolazeći signal $x(t)$ zajedno sa aditivnim šumom $n_u(t)$ sa istim takvim poznatim signalom $x(t)$ iz lokalnog oscilatora, to mu je i dato ime ***korelator ili korelacioni prijemnik***.

Vjerovatnoća pojave greške na izlazu iz prijemnika je ista kao i kod podešenog filtra.

Naravno, i ovdje važi da korelator radi u uslovima bijelog šuma.